Correction de l'examen partiel du 20 octobre 2012
Section A

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $r \in \mathbb{K}$ est racine de $P(X)$ lorsque $P(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i = 0$. On dit que $r \in \mathbb{K}$ est racine triple de $P(X)$ lorsque $(X - r)^3$ divise $P(X)$ et $(X - r)^4$ ne divise pas $P(X)$.
2. Enoncé de la formule de Moivre : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe non nul. On note M le point du plan cartésien $\mathbb{R}^2$ ayant pour affixe z. Le module de z est la distance du segment $[OM]$ et un argument de z est une mesure de l'angle entre l'axe des abscisses et la demi droite $[OM)$.
Observons que (grâce à la formule d'Euler) :
$$\sqrt{3} + i = 2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2 \cdot (\cos\pi/6 + i\sin\pi/6) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$
Ainsi
$$z = (\sqrt{3} + i)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}.$$
Le module de z est donc 2^n et un argument $\frac{n\pi}{6}$.

Exercice 2 1. L'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$: $Z^2 + 1 = 0$, admet exactement deux solutions i et $-i$.

2. D'après la question précédente, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(z^2 + z + 1)^2 + 1 = 0$ équivaut à résoudre les deux équations :
$$z^2 + z + 1 = i \quad \text{et} \quad z^2 + z + 1 = -i.$$
   (a) Résolvons l'équation $z^2 + z + (1 - i) = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $-3 + 4i$. Calculons une racine carrée de $-3 + 4i$. Le nombre complexe $\delta = a + ib$ est une racine carrée de $-3 + 4i$ si, et seulement si, le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifie le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{ccc} a^2 - b^2 & = & -3 \\ 2ab & = & 4 \\ a^2 + b^2 & = & 5 \end{array}\right.$$
   On en déduit donc d'une part que a et b sont de même signe et que $a^2 = 1$, $b^2 = 4$. En conséquence, $1 + 2i$ est une racine carrée de $-3 + 4i$. Finalement les solutions de l'équation $z^2 + z + (1 - i) = 0$ sont :
$$z_1 = i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - i.$$

(b) Résolvons l'équation $z^2 + z + (1+i) = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $-3-4i$. Calculons une racine carrée de $-3+4i$. Le nombre complexe $\delta = a + ib$ est une racine carrée de $-3-4i$ si, et seulement si, le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifie le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a^2 - b^2 & = & -3 \\ 2ab & = & -4 \\ a^2 + b^2 & = & 5 \end{array}\right.$$

On en déduit donc d'une part que a et b sont de signe opposé et que $a^2 = 1$, $b^2 = 4$. En conséquence, $1-2i$ est une racine carrée de $-3-4i$. Finalement les solutions de l'équation $z^2 + z + (1-i) = 0$ sont :

$$z_1 = -i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 + i.$$

En conclusion, les solutions de l'équation $(z^2 + z + 1)^2 + 1 = 0$ sont :

$$i,\ -i,\ -1+i,\ -1-i.$$

Exercice 3 1. On chercher une solution imaginaire pure $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. en reportant dans l'équation proposée il vient :

$$0 = z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = i(-y^3 + 4y^2 + y - 10) + 3y^2 - 11y + 10.$$

Ainsi $z = iy$ est solution de $z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = 0$ si, et seulement si,

$$\left\{\begin{array}{ccc} 3y^2 - 11y + 10 & = & 0 \\ -y^3 + 4y^2 + y - 10 & = & 0 \end{array}\right.$$

On résout l'équation $3y^2 - 11y + 10 = 0$ en calculant son discriminant $\Delta = 1$. Les solutions de l'équation sont donc $y_1 = 2$ et $y_2 = \frac{5}{3}$. On observe facilement que seule $y_1 = 2$ est solution de l'équation $-y^3 + 4y^2 + y - 10 = 0$. En conclusion, $2i$ est solution imaginaire pure de l'équation $z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = 0$.

2. En développant $(z-2i)\big(z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i\big)$ on obtient l'égalité voulue :

$$z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = (z-2i)\big(z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i\big).$$

3. Cherchons les solutions de $z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$. On calcule pour cela le discriminant. On a

$$\Delta = (3+2i)^2 - 20 - 20i = -15 - 8i.$$

Calculons une racine carrée $\delta = a + ib$ de $\Delta = -15 - 16i$. Le nombre complexe $\delta = a + ib$ est une racine carrée de $-15 - 16i$ si, et seulement si, le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifie le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a^2 - b^2 & = & -15 \\ 2ab & = & -16 \\ a^2 + b^2 & = & 17 \end{array}\right.$$

On en déduit donc d'une part que a et b sont de signe opposé et que $a^2 = 1$, $b^2 = 16$. En conséquence, $1 - 4i$ est une racine carrée de $\Delta = -15 - 16i$. Finalement les solutions de l'équation $z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$ sont :

$$z_1 = 2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + 3i.$$

En conclusion, les solutions de l'équation $z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = 0$ sont les trois nombres complexes :

$$2i,\ 2-i,\ 1+3i.$$

Exercice 4

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(f \circ f)(z) = f(f(z)) = f\left(\frac{i}{z}\right) = \frac{i}{\frac{i}{z}} = z.$$

Ceci montre donc que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$.

2. Chercher l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$, revient à chercher l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}^*$ satisfaisants $z = \frac{i}{z}$, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 = i$.
Les solutions de l'équation $z^2 = i$ sont les racines carrées de i, c'est-à-dire, les nombres complexes :

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

En conclusion, l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$ est

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$$

3. Soit $C_r = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = r\}$ le cercle de centre le point d'affixe 0 et de rayon $r > 0$. L'image directe par f du sous-ensemble C_r est :

$$f(C_r) = \{f(z) \mid |z| = r\} = \left\{\frac{i}{z} \mid |z| = r\right\}$$

Observons que $z = re^{i\theta} \in C_r$ si, et seulement si, $f(z) = \frac{i}{z} = \frac{1}{r}e^{i(\theta+\pi/2)}$. Ainsi, l'image directe de C_r par f est $C_{1/r}$ le cercle de centre le point d'affixe 0 et de rayon $1/r$.

Exercice 5 Considérons l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, \ x \mapsto x + \frac{1}{x}.$$

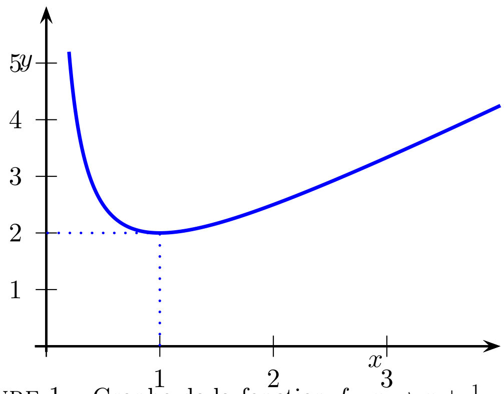

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$

1. Rappeler les définitions d'une application injective, d'une application surjective, d'une application bijective.
2. Vérifier que l'application f ci-dessus est bien définie.
3. Etudier les variations de f et les résumer dans un tableau.
4. Calculer l'image directe $f(\mathbb{R}_+^*)$ de $\mathbb{R}_+^*$ par f. L'application f est-elle surjective (justifier votre réponse) ?
5. Calculer les images réciproques $f^{-1}(]0,1[)$ et $f^{-1}([2,4])$.
6. L'application f est-elle injective (justifier votre réponse) ?
7. On s'intéresse maintenant à l'application :

$$g : [1, +\infty[\to [2, +\infty[, \ x \mapsto x + \frac{1}{x}.$$

Montrer que g est bien définie et qu'elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 6 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0.$$

Indication : observer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) = 1 - z^7.$$

2. Soit w une solution quelconque de l'équation $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = 0$. Vérifier que $1 + w^{2k} \neq 0$ pour $k = 1, 2, 3$, puis que

$$w^7 = 1, \ \ w^8 = w, \ \ w^9 = w^2, \ \ w^{10} = w^3, \ \ w^{11} = w^4, \ \ w^{12} = w^5.$$

3. Notons encore w une solution quelconque de l'équation $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$. En utilisant la question précédente, démontrer que

$$\frac{w}{1+w^2}+\frac{w^2}{1+w^4}+\frac{w^3}{1+w^6}=-2.$$

4. Déduire de la question précédente la valeur de

$$\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}.$$

   Indication : observer que

$$\frac{w}{1+w^2}+\frac{w^2}{1+w^4}+\frac{w^3}{1+w^6}=\frac{1}{w+w^{-1}}+\frac{1}{w^2+w^{-2}}+\frac{1}{w^3+w^{-3}}.$$